第 40 卷 第 4 期
2022 年 12 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 40, No. 4
Dec., 2022

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2022.04.07

显式类辛算法在双自转系外行星后牛顿轨道中的应用

郑晶晶[1,2]，王 颖[1,2]，刘福窑[1]，孙 威[1,2]，王雅茹[1,2]，肖倩倩[1,2]，陈 奋[1,2]

(1. 上海工程技术大学 数理与统计学院，上海 201620； 2. 上海工程技术大学 计算物理与应用研究中心，上海 201620)

摘要： 系外行星的长期动力学演化需要可靠的数值计算方法。辛算法具有保能量、保结构的特点，是研究哈密顿系统长期演化的最佳积分工具。双自转系外行星后牛顿哈密顿系统中坐标和动量不可分离，显式辛算法不能直接应用。利用相空间扩充构造显式类辛算法不会引入人工耗散，具有保能量的优势。主要探讨四阶中点置换相空间扩充显式类辛算法在双自转系外行星后牛顿轨道中的数值性能。结果表明，中点置换相空间扩充显式类辛算法，在顺行非近共面轨道的算法精度与 RKF8(9) 算法精度差一个量级；在逆行轨道和近圆轨道的算法精度与 RKF8(9) 算法精度相当；在偏心率小于 0.9 的轨道表现出高于同阶对比算法的算法精度。除此之外，该算法具有良好的稳定性，计算效率约是 RKF8(9) 的 3 倍。

关 键 词： 系外行星；隐式中点法；相空间扩充类辛算法

中图分类号： P132 **文献标识码：** A

1 引 言

系外行星的研究在 1995 年迎来突破，Mayor 和 Queloz[1] 公布了有史以来发现的第一颗环绕类太阳恒星运行的系外行星 (51 Peg b)，这是人类观测到的第一颗热木星。热木星是一类质量在 $0.3M_\mathrm{J} \leqslant m(m \times \sin i) \leqslant 13M_\mathrm{J}$ (M_J 表示木星质量，i 表示轨道面法向与观测者视线方向的夹角)，轨道周期 $p \lesssim 10$ d 的气巨星。截止 2021 年 12 月 8 日，已经认证的系外行星达到 4 576 颗①，其中热木星有 492 颗。由系外行星的观测数据可知，系外行星与太阳系内行星在轨道特征上明显不同。热木星、热地球和高偏心率系外行星的发现都对传统的行星

收稿日期： 2021-12-31； **修回日期：** 2022-03-21

资助项目： 国家自然科学基金 (11803020, U2031145, 41807437)；上海工程技术大学研究生科研创新项目 (20KY2108)

通讯作者： 王颖，wangying424524@163.com

①https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/

形成理论提出了挑战。通过 Rossiter-McLaughlin[2–4] 效应发现，一些热木星的轨道面法向与主星的自转轴之间的夹角很大[5–12]，甚至存在一些逆行的热木星[13–19]。

目前研究热木星高倾角形成的机制都是在牛顿力学的框架内进行的，但是在相邻行星或伴星的倾斜轨道下，轨道-自旋耦合后牛顿项会导致主星的自旋进动。高阶后牛顿近似主要分为后牛顿拉格朗日近似方程、自洽方程及 ADM 坐标系下的后牛顿哈密顿量[20–27]。在同阶情况下，ADM 坐标系下的后牛顿哈密顿量和后牛顿拉格朗日形式的物理等价性已经得到验证[25–27]。但是，这两种后牛顿形式在轨道动力学行为上并不是完全等价的[22, 28–31]。当两种形式中的一种通过勒让德变换转化为另一种形式时，高阶后牛顿项被截断。对于像太阳系这样的弱引力场，这种差异可以忽略不计，但对于致密天体这样的强引力场，可能会对两种形式的动力学产生重要影响。有两种运动方程可以求解保守的拉格朗日动力学系统，分别为截断近似的运动方程和无截断自洽运动方程，这两者之间也存在差异[32–35]。这种差异可能使得两种后牛顿近似具有不同的可积性和不可积性，或有序性和混沌性。Wu 和 Xie[36] 提出的正则共轭自旋变量，在判定自旋致密双星后牛顿哈密顿系统的可积性或不可积性时起着非常重要的作用，由此论证了后牛顿单体自旋致密双星系统是可积的。

无论是在牛顿引力理论还是在广义相对论情形下，系外行星大偏心率或大倾角轨道 (行星轨道面法向与主星自转轴之间的夹角) 的长期演化过程都需要可靠的数值计算方法。早期求解微分方程的泰勒级数法[37] 和龙库法[38] 在长期轨道积分时并不可靠。Ruth[39] 和冯康[40] 分别在 1983 年和 1984 年提出辛算法，该算法基于哈密顿力学的基本原理，使离散化的差分方程保持哈密顿系统的原始辛结构，具有长期稳定性。辛算法的提出使数值计算方法的发展进入了全新阶段。在太阳系内，Wisdom-Holman 辛算法[41] 最为常用，该算法是将哈密顿系统分解为主要部分和次要部分进行计算。Laskar 和 Robutel 发展了高阶辛算法，并用其研制长期历表[42]。Ruth[39] 提出的显式辛算法只能用于求解坐标、动量可分离的哈密顿系统，计算效率和稳定性较高。对于变量不可分离的哈密顿系统，显式辛算法不能直接应用，可用隐式辛算法或显隐混合辛算法[43–48]，还可以引入相空间扩充方法构造显式算法[49–56]。冯康[40] 提出的以隐式中点法为基础的隐式辛算法，适用于求解任何哈密顿系统，但是该算法需要进行多次迭代才能达到较高的精度，计算效率明显低于显式辛算法，一般不作为第一选择。相空间扩充显式类辛算法最早由 Pihajoki[49] 提出，通过使用动量置换使得显式辛算法在含有不可分变量的哈密顿系统中的应用成为可能，但是破坏了哈密顿系统的辛结构，不属于严格意义上的辛算法，故称之为类辛算法。Tao[50] 在此基础上提出将哈密顿系统分为三个部分，保持了算法的辛结构。后续 Liu 等人[51, 52] 在 Pihajoki[49] 的基础上找到了更好的置换方式，结合 Yoshida[58] 高阶算法的构建，提出了高阶坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法。该算法通过两次置换 (坐标置换和动量置换) 之后可以达到高精度和稳定性，但在后牛顿致密双星系统中的一些混沌轨道无法保持系统的能量稳定[53, 54]。为了解决这个问题，Luo 等人[53, 54] 提出中点置换相空间扩充显式类辛算法，该算法只需要进行一次中点置换就能达到较高的精度和稳定性。Wu 等人[55] 在扩大相空间的基础上提出优化算法，与未优化算法相比，其精度得到提升。Li 和 Wu[56] 在 Mikkola 和 Palmer[59] 的基础上再结合各种置换方法，提出相空间扩充对数哈密顿显式对称算法，该算法在解决高偏心率轨道和混沌轨道方面表

现出较好的计算精度和效率。Pan 等人[57]构建的自洽后牛顿拉格朗日方程的扩大相空间半隐类辛算法，在能量保持上也展现出好的效果。近期，我国学者把黑洞时空分解为有多个显式分析解的部分，然后再组合成显式辛算法，解决了相对论黑洞时空构建显式辛算法的国际难题[60−67]。

本文主要研究中点置换相空间扩充显式类辛算法在双自转后牛顿系外行星轨道中的应用。一阶后牛顿双自转二体问题哈密顿系统中，变量不可分离，并且自旋变量是以非正则的形式表示，不具备全局意义上的辛结构，因此限制了辛算法的进一步应用。我们使用 Wu 和 Xie[36]的方法，通过引入类柱坐标系实现自旋变量正则化，使系统的相空间具有完整的辛结构。在一阶后牛顿双自转二体问题中采用四阶隐式中点法、四阶坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法、四阶中点置换相空间扩充显式类辛算法和 RKF8(9) 算法进行数值模拟。讨论四种算法在双自转后牛顿系外行星轨道 (高倾角轨道、低偏心率轨道和高偏心率轨道) 中的计算精度和效率。给出四种算法的能量误差与行星轨道倾角和偏心率的关系图，对算法能量误差与轨道倾角或偏心率的关系进行讨论，最后对不同算法数值求解恒星的视向速度进行了讨论。

2 一阶后牛顿双自转二体问题

2.1 物理模型

一阶后牛顿双自转二体问题简化为质心参考系后，哈密顿量可以写为[23, 68−70]：

$$H = H_{\rm N} + \epsilon H_1 \quad , \tag{1}$$

其中，ϵ 是微扰理论的小参数，$\epsilon = 1/c^2$，c 表示光速。

$$H_{\rm N} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{J}_1^2}{I_1} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{J}_2^2}{I_2} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{GM\mu}{r} \quad , \tag{2}$$

$H_{\rm N}$ 是未受扰动的哈密顿量，H_1 可以展开为：

$$H_1 = H_{\rm 1PN} + H_{\rm SO} \quad , \tag{3}$$

其中，

$$H_{\rm 1PN} = \mu \left\{ \frac{1}{8}(3\nu - 1)\frac{\boldsymbol{p}^4}{\mu^4} - \frac{GM}{2r}\left[(3+\nu)\frac{\boldsymbol{p}^2}{\mu^2} + \nu\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{\mu}\right)^2\right] + \frac{G^2M^2}{2r^2} \right\} \tag{4}$$

是一阶后牛顿轨道哈密顿量，

$$H_{\rm SO} = \frac{2G}{r^3}\left[\left(1 + \frac{3}{4}\frac{m_2}{m_1}\right)\boldsymbol{J}_1 + \left(1 + \frac{3}{4}\frac{m_1}{m_2}\right)\boldsymbol{J}_2\right]\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) \tag{5}$$

是 1.5PN 自旋-轨道耦合项。在以上这些公式中，G 是万有引力常数，m_1 和 m_2 表示两个天体的质量，其中，m_1 代表次级天体的质量，m_2 代表主天体的质量。$M = m_1 + m_2$ 是两

个天体的总质量，$\mu = m_1 m_2/M$, $\nu = \mu/M$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 分别为质心坐标系中天体 1 和天体 2 的动量。$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{n}$ 方向由天体 2 指向天体 1，$\boldsymbol{n}$ 表示单位径矢。自旋变量 $\boldsymbol{J}_i$ 在式 (5) 中以非正则变量的形式表示，因此哈密顿系统是局部保辛的，不具有完整的辛结构，不利于进一步使用辛算法进行数值模拟。Wu 和 Xie[36] 提出通过引入类柱坐标系来表示自旋变量，利用守恒自旋量将自旋变量转化为关于正则坐标 $\boldsymbol{\theta}_i$ 和正则动量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 的形式。自旋变量正则化使得原始哈密顿系统由 12 维空间降为 10 维相空间，使整个哈密顿系统的相空间具有完整的辛结构。自旋变量用 $(\rho_i, \theta_i, \xi_i)$ 表示为：

$$\boldsymbol{J}_i = \chi_i {m_i}^2 \hat{\boldsymbol{J}}_i \quad , \tag{6}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{J}}_i$ 表示单位自旋矢量，即 $|\hat{\boldsymbol{J}}_i|$=1，表示为：

$$\hat{\boldsymbol{J}}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \cos\theta_i \\ \rho_i \sin\theta_i \\ \kappa_i \xi_i \end{pmatrix} \quad , \tag{7}$$

其中，

$$\kappa_i = 1/(\chi_i m_i^2) \quad , \tag{8}$$

$$\rho_i = \sqrt{1-(\kappa_i \xi_i)^2} \quad . \tag{9}$$

将式 (7)－(9) 代入式 (6) 中，经过转换就可以得到正则共轭的自旋变量：

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} \sqrt{J_i^2 - \xi_i^2}\cos\theta_i \\ \sqrt{J_i^2 - \xi_i^2}\sin\theta_i \\ \xi_i^2 \end{pmatrix} \quad \#1q'q'q'q \; (i=1,2) \quad , \tag{10}$$

其中，J_i 为式 (6) 的模，即 $|\boldsymbol{J}_i|$。

因此，质心坐标系下含有正则自旋变量的一阶后牛顿双自转二体问题哈密顿量表示为：

$$H = H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{J}_1(\theta_1, \xi_1), \boldsymbol{J}_2(\theta_2, \xi_2)) \quad , \tag{11}$$

其中，

$$H_{\rm N} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{J}_1^2}{I_1} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{J}_2^2}{I_2} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{GM\mu}{r} \quad , \tag{12}$$

$$H_{\rm 1PN} = \mu\left\{\frac{1}{8}(3\nu-1)\frac{\boldsymbol{p}^4}{\mu^4} - \frac{GM}{2r}\left[(3+\nu)\frac{\boldsymbol{p}^2}{\mu^2} + \frac{\nu(xp_x+yp_y+zp_z)^2}{\mu^2 r^2}\right] + \frac{G^2M^2}{2r^2}\right\} \quad , \tag{13}$$

$$\begin{aligned} H_{\rm SO} \ = \ & \frac{2G}{r^3}\left\{\left[\left(1+\frac{3}{4}\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\sqrt{J_1^2-\xi_1^2}\cos\theta_1\right) + \left(1+\frac{3}{4}\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\sqrt{J_2^2-\xi_2^2}\cos\theta_2\right)\right](yp_x - \right. \\ & zp_y) + \left[\left(1+\frac{3}{4}\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\sqrt{J_1^2-\xi_1^2}\sin\theta_1\right) + \left(1+\frac{3}{4}\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\sqrt{J_2^2-\xi_2^2}\sin\theta_2\right)\right](zp_x - \\ & \left. xp_z) + \left[\left(1+\frac{3}{4}\frac{m_2}{m_1}\right)\xi_1 + \left(1+\frac{3}{4}\frac{m_1}{m_2}\right)\xi_2\right](xp_y - yp_x)\right\} \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

本文假设所有的天体都是围绕自转轴旋转的球体，遵循 Barke[70−72] 和 Wex[73] 的解释，自旋变量 $\boldsymbol{J}_i$ 可以近似地表示为定轴转动球体的旋转角动量，即：

$$\boldsymbol{J}_i = I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad . \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_i$ 是天体 i 的旋转角速度，I_i 是天体 i 的惯性矩。恒星和行星的惯性矩的表达式与各自的质量、半径有关。恒星的惯性矩表达式为[74]：

$$I \approx m\beta^2 R^2 \quad , \tag{16}$$

β 取值在 0.175~0.385 之间。行星的惯性矩表达式为[75]：

$$I \approx \alpha m R^2 \quad , \tag{17}$$

当行星是气巨星时，$\alpha = 0.2$；属于固态行星时，$\alpha = 0.25$。

2.2 算法描述与构造

式 (11)−(14) 中的坐标与动量不可分离，显式辛算法不能直接应用。隐式辛算法和相空间扩充类辛算法在含有不可分变量的哈密顿系统中是不错的选择。常用的算法主要有隐式中点法、坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法、中点置换相空间扩充显式类辛算法。下面主要介绍这三种算法，并结合测试模型进行相应的算法构造。

2.2.1 隐式中点法

隐式中点法在含有不可分离变量的哈密顿系统中的实用性，在很多算例中都得到了证明。我们可以使用牛顿迭代法和赛德尔迭代法直接进行求解，从第 n 步到第 $(n+1)$ 步的差分离散格式写为：

$$IM2:\begin{cases} \boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + h\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}_{n+1}+\boldsymbol{q}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\theta}_{n+1}+\boldsymbol{\theta}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{p}_{n+1}+\boldsymbol{p}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}+\boldsymbol{\xi}_n}{2}\right) \\ \boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + h\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\xi}}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}_{n+1}+\boldsymbol{q}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\theta}_{n+1}+\boldsymbol{\theta}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{p}_{n+1}+\boldsymbol{p}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}+\boldsymbol{\xi}_n}{2}\right) \\ \boldsymbol{p}_{n+1} = \boldsymbol{p}_n - h\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}_{n+1}+\boldsymbol{q}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\theta}_{n+1}+\boldsymbol{\theta}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{p}_{n+1}+\boldsymbol{p}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}+\boldsymbol{\xi}_n}{2}\right) \\ \boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_n - h\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dfrac{\boldsymbol{q}_{n+1}+\boldsymbol{q}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\theta}_{n+1}+\boldsymbol{\theta}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{p}_{n+1}+\boldsymbol{p}_n}{2}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}+\boldsymbol{\xi}_n}{2}\right) \end{cases} . \tag{18}$$

Yoshida[58] 提出了高阶算法的构建，主要是在二阶显式辛算法的基础上，利用三种 $2n$ 阶算法在合适的步长系数组合下对称构造一个 $(2n+2)$ 阶算法：

$$S_{2n+2}(h) = S_{2n}(\lambda_1 h) S_{2n}(\lambda_2 h) S_{2n}(\lambda_1 h) \quad , \tag{19}$$

系数 λ_1 和 λ_2 为：

$$\lambda_1 = \frac{-2^{1/(2n+1)}}{2-2^{1/(2n+1)}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2-2^{1/(2n+1)}} \quad . \tag{20}$$

通过使用 Yoshida[58] 构建高阶算法的方式，四阶隐式中点法 IM4 的表达式可以写为：

$$IM4(h) = IM2(\lambda_1 h)IM2(\lambda_2 h)IM2(\lambda_1 h) \quad , \tag{21}$$

系数 λ_1 和 λ_2 为：

$$\lambda_1 = \frac{-2^{1/3}}{2-2^{1/3}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2-2^{1/3}} \quad . \tag{22}$$

2.2.2　相空间扩充类辛算法

Pihajoki[49] 在 2015 年提出了相空间扩充类辛算法。我们通过对原始哈密顿量进行相空间扩充，复制原始变量得到 $(\widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\boldsymbol{p}}, \widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2)$, 双倍化相空间变量使得 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2) \longrightarrow (\boldsymbol{q}, \widetilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}, \widetilde{\boldsymbol{p}}, \theta_1, \widetilde{\theta}_1, \theta_2, \widetilde{\theta}_2, \xi_1, \widetilde{\xi}_1, \xi_2, \widetilde{\xi}_2)$。最终得到两个完全相等的哈密顿量 $H_1(\boldsymbol{q}, \theta_1, \theta_2, \widetilde{\boldsymbol{p}}, \widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2)$, $H_2(\widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \boldsymbol{p}, \xi_1, \xi_2)$，与原始哈密顿量 H 完全相同，它们组成一个新的哈密顿量：

$$\widetilde{H}(\boldsymbol{q}, \widetilde{\boldsymbol{q}}, \theta_i, \widetilde{\theta}_i, \boldsymbol{p}, \widetilde{\boldsymbol{p}}, \xi_i, \widetilde{\xi}_i) = H_1(\boldsymbol{q}, \theta_i, \widetilde{\boldsymbol{p}}, \widetilde{\xi}_i) + H_2(\widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\theta}_i, \boldsymbol{p}, \xi_i),\ (i=1,2) \quad . \tag{23}$$

哈密顿量 H_1 和 H_2 是坐标、动量可分离的哈密顿系统，相互独立且可积，可以分别进行解析求解。

H_1 相应的正则方程写为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \widetilde{\boldsymbol{p}}}, & \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\theta}_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \widetilde{\xi}_1}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\theta}_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \widetilde{\xi}_2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \boldsymbol{q}}, & \dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \theta_1}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \theta_2}. \end{cases} \tag{24}$$

H_2 相应的正则方程写为：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_2}{\partial \boldsymbol{p}}, & \dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_1}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H_2}{\partial \xi_2}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}, & \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\xi}_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial \widetilde{\theta}_1}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\xi}_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial \widetilde{\theta}_2}. \end{cases} \tag{25}$$

二阶辛算法可应用于哈密顿量 $\widetilde{H}$，h 是步长。二阶辛算法可写为：

$$S_2(h) = H_2\left(\frac{h}{2}\right) H_1(h) H_2\left(\frac{h}{2}\right) \quad . \tag{26}$$

在初始时刻，原始坐标、动量与扩展后的坐标、动量完全相等，但随着时间的累积，在积分过程中由于原变量与扩展变量的耦合效应，两者会逐渐变得不相等。Pihajoki[49] 将二阶辛算法进行了改正，通过引入置换变量 $\boldsymbol{M}_i$ 解决了这个问题，即：

$$\tilde{S}_2(h) = \boldsymbol{M}_2 H_2\left(\frac{h}{2}\right) H_1\left(\frac{h}{2}\right) \boldsymbol{M}_1 H_1\left(\frac{h}{2}\right) H_2\left(\frac{h}{2}\right) \quad , \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 代表动量置换 $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{p}}$。

2.2.3 连续坐标动量置换相空间扩充类辛算法

Liu 等人[51, 52]在 Pihajoki[49]的基础上找到了更好的置换方式，提出了四阶连续坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法，表示为：

$$S4 = S_2(\lambda_1 h)S_2(\lambda_2 h)S_2(\lambda_3 h)\boldsymbol{M}_1 \times S_2(\lambda_3 h)S_2(\lambda_2 h)S_2(\lambda_1 h)\boldsymbol{M}_2 \quad , \tag{28}$$

其中，$\boldsymbol{M}_1$ 表示动量置换 $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{p}}$, $\xi_1 \leftrightarrow \widetilde{\xi}_1$, $\xi_2 \leftrightarrow \widetilde{\xi}_2$, $\boldsymbol{M}_2$ 表示坐标置换 $\boldsymbol{q} \leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{q}}$, $\theta_1 \leftrightarrow \widetilde{\theta}_1$, $\theta_2 \leftrightarrow \widetilde{\theta}_2$，系数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/[2(2-2^{1/3})]$, $\lambda_3 = \dfrac{1}{2} - 2\lambda_1$。

连续坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法，需要进行两次三重积分才能达到高精度效果。在后牛顿哈密顿问题和旋转哈密顿问题等哈密顿系统不可分问题中，该算法得到了很好的应用，但在旋转致密双星后牛顿哈密顿系统的一些混沌轨道中无法保持系统的能量稳定[53, 54]。

2.2.4 中点置换相空间扩充类辛算法

Luo 等人[53, 54]在 Liu 等人[51, 52]的基础上进行了调整，提出了中点置换相空间扩充显式类辛算法。该算法不需要进行两次置换，只需要进行一次中点置换就可以得到很好的精度和稳定性。在积分过程中，中点置换使得原始坐标、动量与扩展坐标、动量始终相等。四阶中点置换相空间扩充类辛算法 $A4$ 表示为：

$$A4 = \boldsymbol{M} \otimes S_2(\lambda_3 h)S_2(\lambda_2 h)S_2(\lambda_1 h) \quad , \tag{29}$$

其中，系数 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/(2-2^{1/3})$, $\lambda_3 = 1 - 2\lambda_1$。$\boldsymbol{M}$ 代表中点置换，即：

$$\begin{cases} \boldsymbol{q} \to \dfrac{\boldsymbol{q}+\widetilde{\boldsymbol{q}}}{2} , \quad \widetilde{\boldsymbol{q}} \to \dfrac{\boldsymbol{q}+\widetilde{\boldsymbol{q}}}{2} , \\ \theta_1 \to \dfrac{\theta_1+\widetilde{\theta}_1}{2} , \quad \widetilde{\theta}_1 \to \dfrac{\theta_1+\widetilde{\theta}_1}{2} , \\ \theta_2 \to \dfrac{\theta_2+\widetilde{\theta}_2}{2} , \quad \widetilde{\theta}_2 \to \dfrac{\theta_2+\widetilde{\theta}_2}{2} ; \\ \boldsymbol{p} \to \dfrac{\boldsymbol{p}+\widetilde{\boldsymbol{p}}}{2} , \quad \widetilde{\boldsymbol{p}} \to \dfrac{\boldsymbol{p}+\widetilde{\boldsymbol{p}}}{2} , \\ \xi_1 \to \dfrac{\xi_1+\widetilde{\xi}_1}{2} , \quad \widetilde{\xi}_1 \to \dfrac{\xi_1+\widetilde{\xi}_1}{2} , \\ \xi_2 \to \dfrac{\xi_2+\widetilde{\xi}_2}{2} , \quad \widetilde{\xi}_2 \to \dfrac{\xi_2+\widetilde{\xi}_2}{2} . \end{cases} \tag{30}$$

3 算法在一阶后牛顿双自转二体问题中的应用

本章讨论了各种算法在一阶后牛顿双自转二体问题中的数值性能。主要选取三类系外行星轨道 (高倾角轨道、低偏心率轨道、高偏心率轨道) 进行数值模拟。我们分别采用四阶隐式中点法 (IM4)，四阶坐标动量置换相空间扩充显式类辛算法 (S4)，四阶中点置换相空间

扩充显式类辛算法 (A4) 和 RKF8(9) 算法在三类轨道中进行数值模拟。将 RKF8(9) 算法作为精确解与其他算法进行对比分析；扫描得到四种算法的能量误差与行星轨道倾角和偏心率的关系图，并进行讨论；最后对比了不同算法数值求解恒星视向速度的精度。

3.1 初始坐标动量的获得

初始时刻的坐标与动量可以通过给定初始轨道根数求出。在二体问题中有 5 个不变的轨道根数：轨道半长径 $\widetilde{a}$、偏心率 e、轨道倾角 i、升交点经度 Ω 和近点角距 ω。还有轨道根数平近点角 M，会随着时间线性变化[76]。平近点角 M 与偏近点角 E 满足开普勒方程：

$$E - e\sin E = M \quad . \tag{31}$$

二体问题的开普勒解表示为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{q} = \widetilde{a}(\cos E - e)\boldsymbol{P} + \widetilde{a}\sqrt{1-e^2}\sin E\boldsymbol{Q} \\ \dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{-\widetilde{a}^2 n}{r}\sin E\boldsymbol{P} + \dfrac{\widetilde{a}^2 n}{r}\sqrt{1-e^2}\cos E\boldsymbol{Q} \end{cases} ,$$

其中，$n = \sqrt{\mu/\widetilde{a}^3}$ 表示平均角速率，r 是天体 2 到天体 1 之间的距离。r 表示为：

$$r = \widetilde{a}(1 - e\cos E) \quad , \tag{32}$$

拉普拉斯矢量 $\boldsymbol{P}$ 表示为：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{bmatrix} \quad , \tag{33}$$

拉普拉斯矢量 $\boldsymbol{Q}$ 表示为：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{bmatrix} \quad . \tag{34}$$

3.2 数值检验

3.2.1 高倾角轨道

轨道 1 是高倾角轨道，相关参数见表 1。其中 $M_{\rm J}$ 表示木星质量，$M_\odot$ 表示太阳质量，$R_\oplus$ 表示地球半径，$R_\odot$ 表示太阳半径。以 XO-3 b[77] 为例，XO-3 b 是一颗高倾角热木星，行星轨道角动量方向与主星自转轴的夹角投影达到 $37.3° \pm 3.7°$。

我们给定初始轨道根数为 $\widetilde{a} = 0.045\,39$ AU，$e = 0.05$，$i = 37°$，$\Omega = 0°$，$\omega = 0°$，$M = 0°$，$\theta_1 = 90°$，$\theta_2 = 95°$，初始轨道运动周期 $T = 0.008\,1$ a，计算步长 h 设置为初始轨道周期的 1/600，积分时间 $t = 10^7 T$。图 1 通过绝对能量误差 $\triangle H$ 展示了 IM4，A4，S4 和 RKF8(9) 的能量误差对比结果。$\triangle H = H(t) - H(0)$，$H(t)$ 与 $H(0)$ 分别表示哈密顿量在时间 t 和 0

时的值。图 1 结果显示，算法精度由低到高依次为 IM4, S4, A4, RKF8(9)。其中，扩充相空间类辛算法 A4 和 S4 具有长期的稳定性，A4 精度比 S4 高约 1 个量级。S4 算法与 IM4 算法精度在积分前期几乎一致，但是 IM4 算法在计算到时间 $t = 10^6T$ 之后，由于迭代次数过多、舍入误差增大，因此能量误差曲线开始上移。RKF8(9) 精度最高，但是能量误差不稳定并呈长期增长趋势；能量误差逐渐逼近 A4 算法，积分时间到 10^7T 时，能量误差大约比 A4 算法高 1 个量级。

表 1 轨道 1 的相关参数

参数	物理含义	数值	单位
m_1	行星质量	11.7	M_J
m_2	主星质量	1.41	$M_\odot$
R_1	行星半径	13.64	$R_\oplus$
R_2	主星半经	1.68	$R_\odot$
$\tilde{a}$	轨道半长径	0.045 39	AU
e	偏心率	0.05	
i	轨道倾角	37	(°)
Ω	升交点经度	0	(°)
λ_1	行星自旋倾角	1	(°)
λ_2	主星自旋倾角	1	(°)

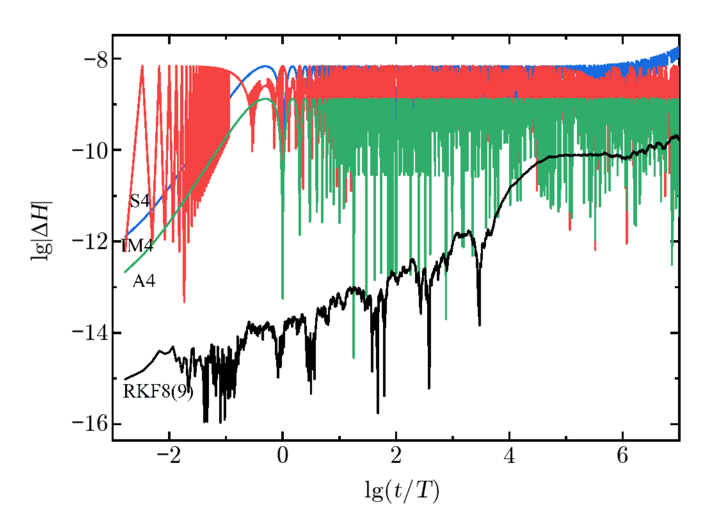


图 1 轨道 1 的算法能量误差对比

表 2 轨道 2 的相关参数

参数	物理含义	数值	单位
m_1	行星质量	0.46	M_J
m_2	主星质量	1.05	$M_\odot$
R_1	行星半径	0.000 42	$R_\odot$
R_2	主星半经	1.156 8	$R_\odot$
$\tilde{a}$	轨道半长径	0.052 35	AU
e	偏心率	0.004 2	
i	轨道倾角	0	(°)
Ω	升交点经度	0	(°)
λ_1	行星自旋倾角	1	(°)
λ_2	主星自旋倾角	1	(°)
P_rot	主星自旋周期	30	d

3.2.2 低偏心率轨道

轨道 2 是低偏心率轨道，相关参数见表 2。其中 M_J 表示木星质量，$M_\odot$ 表示太阳质量，$R_\odot$ 表示太阳半径。以 51 Peg b[1] 为例，51 Peg b 是一颗热木星，偏心率仅为 0.004 2。

我们给定初始轨道根数为 $\tilde{a} = 0.052\,35$ AU, $e = 0.004\,2$, $i = 0°$, $\Omega = 0°$, $\omega = 0°$, $M = 0°$, $\theta_1 = \theta_2 = 0°$，初始轨道运动周期 $T = 0.016\,9$ a，计算步长 h 设置为初始轨道周期的 1/400，积分时间 $t = 10^7T$。图 2 通过绝对能量误差 $\triangle H$ 展示了 IM4, A4, S4 和 RKF8(9) 的能量误差对比结果。$\triangle H = H(t) - H(0)$, $H(t)$ 和 $H(0)$ 分别表示哈密顿量在时间 t 和 0 时的值。从图 2 中可以看出，算法精度由低到高依次为 S4, IM4, A4, RKF8(9)。扩充相空间 A4 和 S4 两种算法能量误差稳定且没有发生误差偏移，其中 A4 算法精度比 S4 算法高约两个量级。IM4 算法能量误差在计算到时间 $t = 10^4T$ 时曲线开始上移，误差变大。RKF8(9) 精度最高，但是能量误差稳定性

较差，呈直线上升的趋势并且产生较大的误差偏移，在积分时间内最终能量误差与 A4 算法一样。

3.2.3 高偏心率轨道

轨道 3 是高偏心率轨道，相关参数见表 3。其中 M_J 表示木星质量，$M_\odot$ 表示太阳质量，$R_\oplus$ 表示地球半径，$R_\odot$ 表示太阳半径。以 Kepler-1656 b[78] 为例，Kepler-1656 b 是一颗高偏心率亚土星，偏心率达到 0.84 ± 0.1。

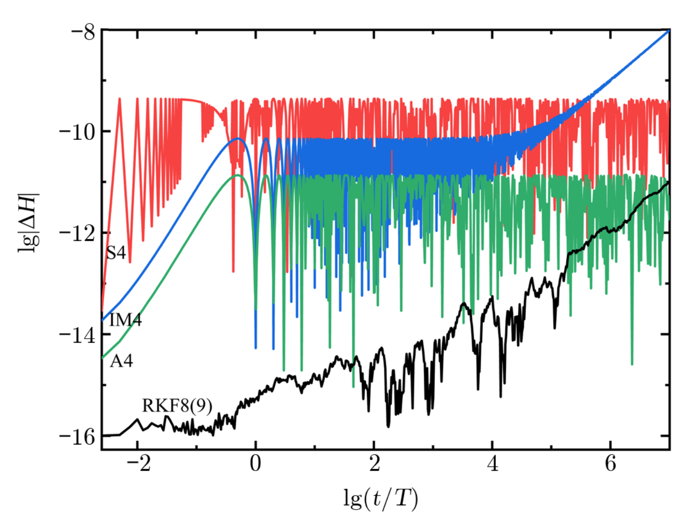


图 2 轨道 2 的算法能量误差对比

表 3 轨道 3 的相关参数

参数	物理含义	数值	单位
m_1	行星质量	0.153	M_J
m_2	主星质量	1.014	$M_\odot$
R_1	行星半径	5.02	$R_\oplus$
R_2	主星半经	1.05	$R_\odot$
$\widetilde{a}$	轨道半长径	0.197	AU
e	偏心率	0.5	
i	轨道倾角	0	(°)
$\varOmega$	升交点经度	0	(°)
λ_1	行星自旋倾角	1	(°)
λ_2	主星自旋倾角	1	(°)

我们给定初始轨道根数为 $\widetilde{a} = 0.197\,\mathrm{AU}$, $e = 0.5$, $i = 0°$, $\varOmega = 0°$, $\omega = 0°$, $M = 0°$, $\theta_1 = \theta_2 = 0°$，初始轨道运动周期为 $T = 0.086\,8\,\mathrm{a}$，计算步长 h 设置为轨道周期的 1/2 700，积分时间 $t = 10^6 T$。图 3 通过绝对能量误差 $\triangle H$ 展示了 IM4, A4, S4 和 RKF8(9) 的能量误差对比结果。$\triangle H = H(t) - H(0)$, $H(t)$ 和 $H(0)$ 分别表示哈密顿量在时间 t 和 0 时的值。从图 3 中可以看出，与 RKF8(9) 精度相比，IM4, A4 和 S4 的精度较低，三种算法的精度相差不大。A4 算法精度要略高于 S4 算法和 IM4 算法，并且表现出较好的稳定性。S4 算法能量误差变化波动较大，不具有长期稳定性。IM4 算法在积分后期曲线上移，误差增加。

综上所述，高阶龙格库塔 RKF8(9) 作为对比算法，在三类系外行星轨道都表现出最好的数值精度，但是该算法稳定性较差。S4 算法在三类轨道中精度相对较差，在低偏心率轨道和高倾角轨道的情况下 S4 算法表现出较好的稳定性，但是在高偏心率轨道情况下能量误差产生较大的波动。IM4 算法精度较差，在低偏心率轨道和高倾角轨道后期，因为迭代次数多，舍入误差增大，产生了误差偏移。A4 算法在三类轨道都表现出较好的精度和稳定性。表 4 列出了四种算法求解三类轨道所需的 CPU 时间，可以看出 A4 的计算效率明显高于其他算法，S4 算法因为两次置换导致计算时间差不多是 A4 算法的 2 倍，IM4 和 RKF8(9) 需要花费更多的时间，RKF8(9) 所需时间约是 A4 的 3 倍。总的来说，A4 算法不论是在精度方面还是稳定性和计算效率方面都表现最好。

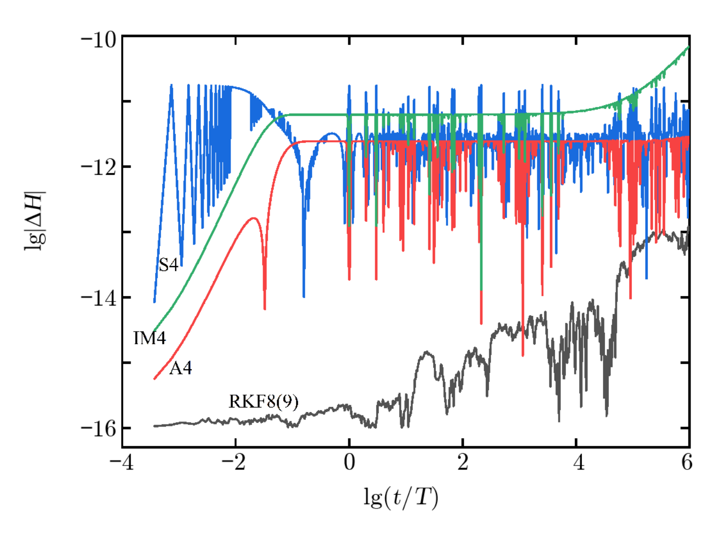


图 3 轨道 3 的算法能量误差对比

表 4 四类算法求解三类轨道所需的 CPU 时间 s

轨道	A4	S4	IM4	RKF8(9)
1	5 394	9 963	22 300	14 764
2	4 209	8 900	16 050	14 916
3	3 425	6 227	9 127	9 874

3.2.4 行星轨道倾角或偏心率与算法能量误差的关系

为了更加清楚地了解行星轨道倾角或偏心率与算法能量误差的关系，我们扫描得到 A4 算法、S4 算法、IM4 算法和 RKF8(9) 算法的能量误差与行星轨道倾角或偏心率的关系图。在算法能量误差与行星轨道倾角的关系中，我们给定初始轨道根数为 $\tilde{a}=0.045\,39$ AU, $e=0.05$, $\Omega=0°$, $\omega=0°$, $M=0°$, $\theta_1=90°$, $\theta_2=95°$，初始轨道运动周期为 $T=0.008\,1$ a，计算步长 h 设置为轨道周期的 1/600，积分时间 $t=10^4T$。轨道倾角 i 的取值从 0° 开始，以 8° 的间隔递增到 180°。图 4 通过平均能量误差 E 展示了 IM4, A4, S4 和 RKF8(9) 的能量误差与行星轨道倾角的关系。从图中我们可以看出，RKF8(9) 的算法精度几乎不受行星轨道倾角的影响，算法精度最高。其余三种算法，在轨道倾角为 0°~28° 时，算法精度发生变化，大约提高两个量级。后期在顺行非近共面轨道，随着行星初始轨道倾角的增加，各算法的精度趋于稳定。其中中点置换相空间扩充类辛算法 A4 在顺行非近共面轨道的精度与 RKF8(9) 相差一个量级，而在逆行轨道中，A4 算法精度与 RKF8(9) 算法精度相当。

在算法能量误差与行星偏心率的关系中，我们给定初始轨道根数为 $\tilde{a}=0.045\,39$ AU, $i=0°$, $\Omega=0°$, $\omega=0°$, $M=0°$, $\theta_1=90°$, $\theta_2=95°$，初始轨道运动周期为 $T=0.008\,1$ a，计算步长 h 设置为轨道周期的 1/600，积分时间 $t=10^4T$。偏心率 e 的取值从 0 开始，以 0.1 的间隔递增到 1。图 5 通过平均能量误差 E 展示了 IM4, A4, S4 和 RKF8(9) 的能量误差与行星偏心率的关系。从图中我们可以看出，整体上 RKF8(9) 算法的精度最高。其余三种算法，在偏心率小于 0.9 的情况下，A4 算法具有最好的算法精度。偏心率为 0.9 的时候，A4 算法精度受到影响，算法精度由高到低依次为 S4, IM4, A4。偏心率在 0~0.1 的时候，IM4 算法精度高于 S4 算法，但是后期随着偏心率的越来越大，S4 算法和 IM4 算法的算法精度几乎一致。在高偏心率轨道，S4, IM4, A4 算法精度明显低于 RKF8(9) 算法；这是因为 S4, IM4, A4 算法是定步长算法，在导数变化剧烈的时候，定步长会引入大量误差，而 RKF8(9) 是变步长算法，可以自行调节步长减少误差累积。

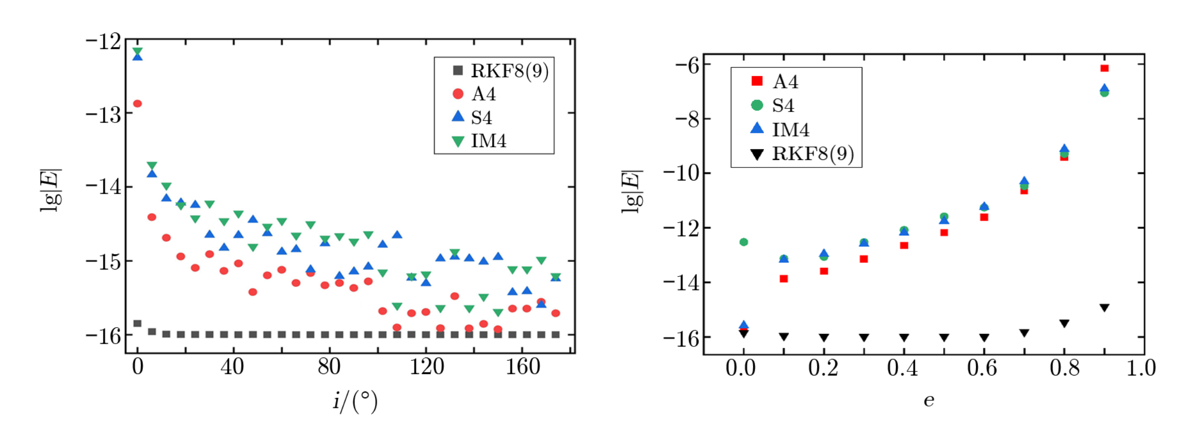


图 4　四种算法的能量误差与行星轨道倾角的关系

图 5　四种算法的能量误差与行星偏心率的关系

3.2.5　各算法得到的恒星视向速度

我们使用 A4, S4, IM4 和 RKF8(9) 算法分别在三类系外行星轨道 (高倾角轨道、低偏心率轨道和高偏心率轨道) 中进行模拟，得到各算法对恒星视向速度的影响。图 6 是积分 10 个周期的对比图，纵坐标表示各算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度。从图中可以看出，在三类轨道中，各算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度曲线重合。

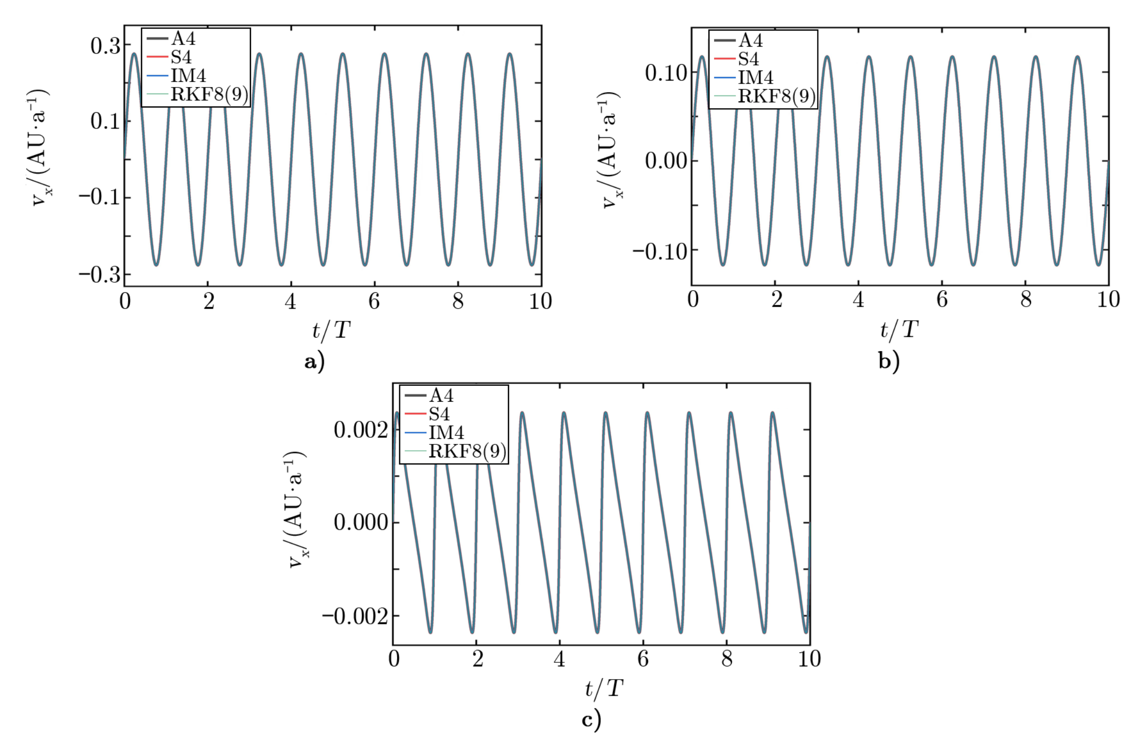


图 6　四种算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度

后续进行更长时间的积分，以 RKF8(9) 算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度作为精确

解，主要讨论积分后 (高倾角轨道积分 10^6T，低偏心率轨道积分 10^7T，高偏心率轨道积分 10^5T) 第一个周期A4 算法、S4 算法、IM4 算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度的最大值的相对误差。结果见表 5。从表 5 中的数据可看出，三种算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度最大值的相对误差都很小，没有显著性差异。

表 5 不同算法得到的沿轴 x 的恒星视向速度的最大值的相对误差

轨道	A4	S4	IM4
高倾角轨道	1.77×10^{-3}	7.504×10^{-5}	-3.49×10^{-3}
低偏心率轨道	5.7×10^{-3}	4.512×10^{-4}	5.11×10^{-3}
高偏心率轨道	6.08×10^{-2}	3.83×10^{-3}	-2.659×10^{-2}

4 总结与展望

本文主要探究显式类辛算法在双自转系外行星后牛顿轨道中的应用。选取三类轨道讨论了四阶隐式中点法、四阶坐标动量置换相空间扩充类辛算法、四阶中点置换相空间扩充类辛算法和 RKF8(9) 在一阶后牛顿双自转二体问题中的算法精度和计算效率，并给出轨道倾角或偏心率与各算法能量误差的关系。数值模拟结果表明，在三类轨道中，四阶隐式中点法因为需要进行多次迭代从而导致了计算成本的增加，并且四阶隐式中点法只有在低偏心率轨道表现出高于四阶坐标动量置换相空间扩充类辛算法的精度，在高偏心率轨道和高倾角轨道的情况下精度都相对较低，而且在积分后期，因为舍入误差过大的原因导致能量误差发生偏移。四阶坐标动量置换相空间扩充类辛算法在三类轨道中表现出相较一般的精度和稳定性，在高偏心率轨道能量误差产生较大的波动，并且因为需要两次置换，计算成本增加。四阶中点置换相空间扩充类辛算法整体上都表现出较好的精度和稳定性，计算效率最高。除此之外，四阶中点置换相空间扩充类辛算法在逆行轨道表现优异，算法精度和 RKF8(9) 精度相当，在偏心率小于 0.9 的轨道表现出高于同阶对比算法的精度。

四阶中点置换相空间扩充类辛算法在非近共面轨道、逆行轨道和近圆轨道都表现出最好的适用性，后续我们将采用四阶中点置换相空间扩充类辛算法对热木星高倾角的形成进行探究。系外行星系统的轨道构型多种多样，未来还可以将算法应用于解决更多的系外行星轨道的长期积分问题，使我们对系外行星系统的动力学形成和演化有更加清晰的了解与认识。

参考文献：

[1] Mayor M, Queloz D. Nature, 1995, 378: 355
[2] Holt. A&A, 1893, 12: 646
[3] Rossiter R A. ApJ, 1924, 60: 15
[4] McLaughlin D B. ApJ, 1924, 60: 22

[5] Hébrard G, Bouchy F, Pont b, et al. A&A, 2008, 488: 763
[6] Hébrard G, Desert J M, Diaz R F, et al. A&A, 2010, 516: A95
[7] Narita N, Hirano T, Sato B, et al. PASJ, 2009, 61: 991
[8] Winn J N, Johnson J A, Albrecht S, et al. ApJ, 2009, 703: L99
[9] Triaud A H M J, Collier Cameron A, Queloz D, et al. A&A, 2010, 524: A25
[10] Albrecht S, Winn J N, Johnson J A, et al. ApJ, 2012, 757(1): 18
[11] Winn J N, Fabrycky D C. ARA&A, 2015, 53: 409
[12] Wang Y, Zhou J, Liu H, et al. ApJ, 2017, 848: 20
[13] Bate M R, Lodato G, Pringle J E. MNRAS, 2010, 401: 1505
[14] Lai D, Foucart F, Lin D N C. MNRAS, 2011, 412: 2790
[15] Foucart F, Lai D. MNRAS, 2011, 412: 2799
[16] Batygin K. Nature, 2012, 491: 418
[17] Batygin K, Adams F C. ApJ, 2013, 778: 169
[18] Lai D. MNRAS, 2014, 440: 3532
[19] Spalding C, Batygin K. ApJ, 2014, 790: 42
[20] Faye G, Blanchet L, Buonanno A. Phys Rev D, 2006, 74: 4033
[21] Kidder L E. Phys Rev D, 1995, 52: 821
[22] Chen R C, Wu X. Communications in Theoretical Physics, 2016, 65: 321
[23] Damour T. Phys Rev D, 2001, 64: 4013
[24] Jaranowski P, Schäfer G. Phys Rev D, 2015, 92: 4043
[25] Damour T, Schafer G, Jaranowski P. Phys Rev D, 2001, 63: 4021
[26] de Andrade V C, Blanchet L, Faye G. Classical and Quantum Gravity, 2001, 18: 753
[27] Levi M, Steinhoff J. JCAP, 2016, 2016(01): 008
[28] Wu X, Mei L, Huang G, et al. Phys Rev D, 2015, 91: 4042
[29] Wu X, Huang G. MNRAS, 2015, 452: 3167
[30] Huang L, Wu X, Ma D Z. EPJC, 2016, 79: 1
[31] Huang L, Wu X, Mei L J, et al. Commun Theor Phys, 2017, 68: 375
[32] Li D, Wu X, Liang E. Annalen der Physik, 2019, 531: 136
[33] Li D, Wang Y, Deng C, et al. EPJP, 2020, 135: 1
[34] Li D, Wu X, Liang E. Phys Rev D, 2021, 104: 4039
[35] Cheng X H, Huang G Q. Symmetry, 2021, 13: 584
[36] Wu X, Xie Y. Phys Rev D, 2010, 81: 4045
[37] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 北京: 清华大学出版社, 2001: 35
[38] 周济林. 天体力学基础. 北京: 高等教育出版社, 2005: 182
[39] Ruth R D. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1983, 30(4): 2669
[40] Feng K. difference schemes and symplectic geometry. Beijing: Science Press. 1984: 42
[41] Wisdom J, Holman M. AJ. 1991, 102: 1528
[42] Laskar J, Robutel P. CMDA. 2001, 80: 39
[43] Liao X. CMDA, 1997, 66: 243
[44] Zhong S Y, Wu X, Liu S Q, et al. Phys Rev D, 2010, 82: 1240
[45] Brown J D. Phys Rev D, 2006, 73: 4001
[46] Preto M, Saha P. ApJ, 2009, 703: 1743
[47] Mei L, Ju M, Wu X, et al. MNRAS, 2013, 435: 2246
[48] Mei L, Wu X, Liu F. EPJC, 2013, 73: 1
[49] Pihajoki P. CMDA, 2015, 121: 211
[50] Tao M. Phys. Rev. E. 2016, 94: 3303
[51] Liu L, Wu X, Huang G, et al. MNRAS, 2016, 459: 1968
[52] Liu L, Wu X, Huang G, et al. General Relativity and Gravitation, 2017, 49: 28
[53] Luo J, Wu X, Huang G, et al. ApJ, 2017, 834: 64

[54] Luo J, Wu X, Huang G, et al. EPJP, 2017, 132: 485
[55] Wu Y L, Wu X. IJMPC, 2018, 29: 1850006
[56] Li D, Wu X. MNRAS, 2017, 469: 3031
[57] Pan G, Wu X, Liang E. Phys Rev D, 2021, 104: 4055
[58] Yoshida H. PhLA, 1990, 150: 262
[59] Mikkola S, Palmer P. CMDA, 2000, 77: 305
[60] Wang Y, Sun W, Liu F, et al. ApJ, 2021, 907: 66
[61] Wang Y, Sun W, Liu F, et al. ApJ, 2021, 909: 22
[62] Wang Y, Sun W, Liu F, et al. ApJS, 2021, 254: 8
[63] Wu X, Wang Y, Sun W, et al. ApJ, 2021, 914: 63
[64] Sun W, Wang Y, Liu F, et al. EPJC, 2021, 81: 1
[65] Sun X, Wu X, Wang Y, et al. Universe, 2021, 7: 410
[66] Zhang H, Zhou N, Liu W, et al. Universe, 2021, 7: 488
[67] Zhou N, Zhang H, Liu W, et al. arXiv preprint, arXiv: 2201.02922
[68] Barker B M, O'Conell R F. Phys Rev D, 1970, 2: 1428
[69] Biscani F, Carloni S. MNRAS, 2013, 428: 2295
[70] Barker B M, O'Conell R F. Gen Relativ Gravit, 1979, 11: 149
[71] Barker B M, O'Conell R F. Phys Rev D, 1976, 14: 861
[72] Barker B M, O'Conell R F. Phys Rev D, 1975, 12: 329
[73] Wex N. Class. Quantum Gravity, 1995, 12: 983
[74] Claret A, Gimenez A. A&A, 1989, 81: 37
[75] Millholland S, Laughlin G. ApJ, 2018, 869: L15
[76] Murray C, Dermott S. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1999
[77] Winn J N, Johnson J A, Fabrycky D, et al. ApJ, 2009, 700: 302
[78] Brady M T, Petigura E A, Knutson H A, et al. AJ, 2018, 156: 147

Application of an Explicit Symplectic-like Integrator in Post-Newtonian Orbits of Double-rotating Exoplanet System

ZHENG Jing-jing[1,2], WANG Ying[1,2], LIU Fu-yao[1], SUN Wei[1,2], WANG Ya-ru[1,2], XIAO Qian-qian[1,2], CHEN Fen[1,2]

(1. Shanghai University of Engineering Science, School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai 201620, China; 2. Shanghai University of Engineering Science, Center of Application and Research of Computational Physics, Shanghai 201620, China)

Abstract: Long-term dynamical evolution of exoplanets requires reliable numerical computational methods. Symplectic algorithm has the advantage of conserving energy and structure, which is considered as the best integrator to simulate long-term evolution of Hamiltonian systems. Post-Newtonian Hamiltonian of double-rotating exoplanet system contains inseparable forms of coordinates and momenta, where explicit symplectic integrators cannot be applied directly. The use of phase space extension to construct the explicit symplectic-like algorithm does not introduce artificial dissipation and has the advantage of

energy conservation. This paper mainly discusses the numerical performance of the fourth-order explicit extended phase space symplect-like method with midpoint permutations in post-Newtonian orbits of double-rotating exoplanet system. The results show that the accuracies of the fourth-order explicit extended phase space symplect-like method with midpoint permutations in prograde non near coplanar orbits are only one order of magnitude lower than that of RKF8(9), the accuracies of the algorithm in retrograde orbits and near circular orbits are equivalent to these of RKF8(9), and the accuracy of the algorithm in orbits with eccentricity less than 0.9 are higher than these of the same order comparison algorithms. In addition, the algorithm has good stability and the computational efficiency is about three times that of RKF8(9).

Key words: exoplanet; implicit symplectic algorithm; extended phase space symplect-like method